

► Addition et inégalités

(1) On peut **ajouter** ou **retrancher** un même nombre aux deux membres d'une inégalité, en **conservant son sens**.

(2) On peut **ajouter** membre à membre des **inégalités de même sens**.

► Multiplication et inégalités

(3) On peut **multiplier** ou **diviser** les deux membres d'une inégalité,

par un même nombre **strictement positif**, en **conservant** le sens de l'inégalité.

Si $a \leq b$ et si $c > 0$, alors $a \times c \leq b \times c$ et $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.

par un même nombre **strictement négatif**, mais **en changeant** le sens de l'inégalité.

Si $a \leq b$ et si $c < 0$, alors $a \times c \geq b \times c$ et $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.

Conséquence : pour comparer deux nombres réels **strictement positifs**, on peut comparer leur quotient à 1.

a et b désignent des nombres réels avec $a > 0$ et $b > 0$.

Si $\frac{a}{b} \leq 1$, alors $a \leq b$.

Si $\frac{a}{b} \geq 1$, alors $a \geq b$.

Pour tous nombres réels a, b, c et d ,

• si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$,

• si $a \leq b$, alors $a - c \leq b - c$,

• si $a \leq b$ et si $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

Deux calculs

• Écrire $A = \frac{1}{2} \times 5 - \frac{3}{4}$ sous forme d'une fraction.

$$A = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{10}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

• $f(x) = x^2 - x$. Développer et réduire $A = f(x - 1)$.

$$A = (x - 1)^2 - 5 = x^2 - 2x + 1 - 5 = x^2 - 2x - 4$$



1 x et y désignent deux nombres réels tels que $x \leq y$. Lire et compléter avec $\leq$ ou $\geq$.

a. $x + 2 \leq y + 2$

b. $2x \leq 2y$

c. $\frac{x}{2} \leq \frac{y}{2}$

d. $-2x \geq -2y$

e. $\frac{-x}{2} \geq \frac{-y}{2}$

f. $x - 2 \leq y - 2$

2 a et b désignent deux nombres réels.

1. Entourer les nombres positifs.

• $a + b$ • a^2 • $(a - b)^2$ • $a^2 + 1$ • $b^2 - 3$ • $a^2 + b^2$

2. Donner le signe de chaque produit ou quotient.

a. $-3a^2$ négatif b. $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+1}$ positif c. $\frac{-3a^2}{a^2+1}$ négatif

3 x et y désignent deux nombres réels tels que $x \leq y$. Dans chaque cas, donner le signe du nombre.

a. $x - y$ négatif

b. $y - x$ positif

c. $\frac{y-x}{x^2+2}$ positif

4 a et b désignent deux nombres réels tels que $a \leq b$. Dans chaque cas, compléter avec $\leq$ ou $\geq$.

a. $3a - 2 \leq 3b - 2$ b. $-a \geq -b$ c. $\frac{-2a+1}{3} \geq \frac{-2b+1}{3}$

5 x et y désignent deux nombres réels tels que $-3 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 3$.

Utiliser la propriété (2) pour encadrer $x + y$.

$-3 + 1 \leq x + y \leq 5 + 3$ c'est-à-dire $-2 \leq x + y \leq 8$



6 x et y désignent deux nombres réels tels que $-2 \leq x \leq 3$ et $2 \leq y \leq 5$. Justifier que :

a. $-2 \leq 3x + 2y \leq 19$ b. $-5 \leq -y \leq -2$ c. $-7 \leq x - y \leq 1$

a. $3 \times (-2) \leq 3x \leq 3 \times 3$, c'est-à-dire $-6 \leq 3x \leq 9$.

$2 \times 2 \leq 2y \leq 2 \times 5$, c'est-à-dire $4 \leq 2y \leq 10$.

On ajoute membre à membre :

$-6 + 4 \leq 3x + 2y \leq 9 + 10$, soit $-2 \leq 3x + 2y \leq 19$.

b. $2 \leq y \leq 5$ équivaut à $-1 \times 2 \geq -y \geq -1 \times 5$ soit $-2 \geq -y \geq -5$, c'est-à-dire $-5 \leq -y \leq -2$.

c. On ajoute membre à membre les deux inégalités $-2 \leq x \leq 3$ et $-5 \leq -y \leq -2$.

Ainsi, $-2 + (-5) \leq x + (-y) \leq 3 + (-2)$, soit $-7 \leq x - y \leq 1$.

7 Pour tout nombre réel x , $f(x) = x^2 - 5x + 3$. Montrer que si $1 \leq x \leq 4$, alors $-16 \leq f(x) \leq 14$.

• $1 \leq x \leq 4$ équivaut à $1^2 \leq x^2 \leq 4^2$ car 1, x et 4 sont positifs. Ainsi, $1 \leq x^2 \leq 16$.

• $1 \leq x \leq 4$ équivaut à $1 \times (-5) \geq -5x \geq 4 \times (-5)$ soit $-5 \geq -5x \geq -20$, c'est-à-dire $-20 \leq -5x \leq -5$.

• $1 \leq x^2 \leq 16$ et $-20 \leq -5x \leq -5$, donc $1 - 20 + 3 \leq x^2 - 5x + 3 \leq 16 - 5 + 3$, c'est-à-dire $-16 \leq x^2 - 5x + 3 \leq 14$.

8 x désigne un nombre réel strictement positif. On se propose de comparer les nombres strictement positifs $\sqrt{x}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

a. Compléter : $q = \frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{1} = (\sqrt{x})^2 = x$

b. Compléter : Si $x \leq 1$, alors $q \leq 1$ et $\sqrt{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Si $x \geq 1$, alors $q \geq 1$ et $\sqrt{x} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$.

► Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle figurent une ou plusieurs inconnues désignées par des lettres. Une **solution** d'une inéquation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vraie.

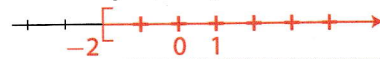
Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation, c'est trouver **toutes ses solutions réelles**.

► Pour résoudre une inéquation du type $ax + b \leq cx + d$ (avec $a \neq c$), on **utilise les propriétés (1) et (3)** (p. 35).

Résolution de l'inéquation du premier degré $4x - 2 \geq x - 8$.

$$\begin{array}{l} 4x - 2 \geq x - 8 \\ 3x - 2 \geq -8 \\ 3x \geq -6 \\ x \geq -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{On soustrait } x \text{ à chaque membre : } 4x - 2 - x \geq x - 8 - x \\ \text{On ajoute 2 à chaque membre : } 3x - 2 + 2 \geq -8 + 2 \\ \text{On divise chaque membre par 3 qui est positif,} \\ \text{donc on conserve le sens de l'inégalité : } \frac{3x}{3} \geq \frac{-6}{3} \end{array}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\mathcal{S} = [-2; +\infty[$.



Deux calculs

• Donner l'écriture scientifique de $A = 5\,200$ et de $B = 0,018$.

$$A = 5,2 \times 10^3 \text{ et } B = 1,8 \times 10^{-2}$$

• Factoriser $C = 9x^2 + 3x + \frac{1}{4}$.

$$C = (3x)^2 + 2 \times 3x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(3x + \frac{1}{2}\right)^2$$



1 Pour chacun des nombres 8 et 2, dire s'il est solution de l'inéquation $3x - 19 \geq x - 7$.

• On remplace x par 8.

$$3x - 19 = 3 \times 8 - 19 = 5 \text{ et } x - 7 = 8 - 7 = 1 \\ 5 \geq 1 \text{ donc 8 est une solution de cette inéquation.}$$

• On remplace x par 2.

$$3x - 19 = 3 \times 2 - 19 = -13 \text{ et } x - 7 = 2 - 7 = -5 \\ -13 < -5 \text{ donc 2 n'est pas solution de l'inéquation.}$$

2 Le nombre $\frac{4}{5}$ est-il solution de l'inéquation :
 $5 - 2x \leq 1 + 3x$?

$$5 - 2x = 5 - 2 \times \frac{4}{5} = 5 - \frac{8}{5} = \frac{25}{5} - \frac{8}{5} = \frac{17}{5}$$

$$1 + 3x = 1 + 3 \times \frac{4}{5} = 1 + \frac{12}{5} = \frac{5}{5} + \frac{12}{5} = \frac{17}{5}$$

$$\frac{17}{5} \leq \frac{17}{5} \text{ donc } \frac{4}{5} \text{ est une solution de l'inéquation.}$$

3 Compléter.

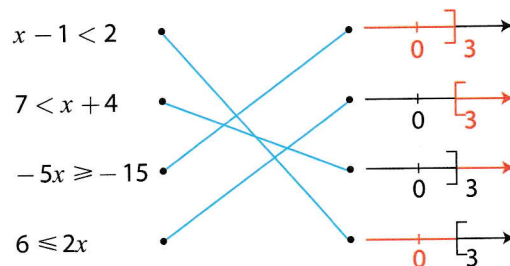
a. $x - 5 \geq 2$ équivaut à $x - 5 + 5 \geq 2 + 5$ soit $x \geq 7$.

b. $x + 3 \geq 9$ équivaut à $x + 3 - 3 \geq 9 - 3$ soit $x \geq 6$.

c. $3x \leq 15$ équivaut à $\frac{3x}{3} \leq \frac{15}{3}$ soit $x \leq 5$.

d. $-4x \leq 12$ équivaut à $\frac{-4x}{-4} \geq \frac{12}{-4}$ soit $x \geq -3$.

4 Relier chaque inéquation à la représentation en rouge de ses solutions sur la droite numérique.



5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $13 + x \leq 5 - 4x$. Représenter l'ensemble de ses solutions à l'aide d'une droite numérique.

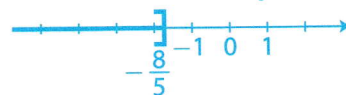
$$13 + x \leq 5 - 4x$$

$$13 + 5x \leq 5$$

$$5x \leq -8$$

$$x \leq -\frac{8}{5}$$

$$\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{8}{5}\right].$$



6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-2x + 1 > 2x - 5$. Représenter l'ensemble de ses solutions à l'aide d'une droite numérique.

$$-2x + 1 > 2x - 5$$

$$-4x + 1 > -5$$

$$-4x > -6$$

$$x < \frac{-6}{-4} \text{ c'est-à-dire } x < \frac{3}{2}.$$

$$\text{L'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[.$$

